Hrvatsko otvoreno natjecanje u informatici

2. kolo, 14. studenoga 2020.

Zadaci

Zadatak	Vremensko ograničenje	Memorijsko ograničenje	Bodovi
Broj	1 sekunda	512 MiB	20
Pinokio	1 sekunda	512 MiB	30
Crtanje	1 sekunda	512 MiB	50
Odašiljači	1 sekunda	512 MiB	70
Euklid	1 sekunda	512 MiB	110
Sjekira	1 sekunda	512 MiB	110
Svjetlo	2 sekunde	512 MiB	110
Ukupno			500

Zadatak Broj

Nedavno je Ivica, kad je već onemoćao od glavinjanja po internetu i previše bijelog štaub šećera s krafni koje konzumira, odlučio napisati pjesmu za jednu našu poznatu pjevačicu. Pjesma je jednostavna poskočica koja kaže:

Ima jedan broj, djeljiv je s x.
U nizu brojeva djeljivih s y.
To je a?

Ovom pjesmom Ivica želi zabaviti, ali i nešto naučiti mlade mozgove koji će je slušati. Za dane brojeve x, y i a odredite zadovoljava li broj a uvjete iz teksta pjesme.

Ulazni podatci

U prvom je retku prirodan broj x ($1 \leq x \leq 1000$) iz teksta pjesme.

U drugom je retku prirodan broj y ($1 \leq y \leq 1000$) iz teksta pjesme.

U trećem je retku prirodan broj a ($1 \leq a \leq 1000$) iz teksta pjesme.

Izlazni podatci

Ispišite `DA` ako a zadovoljava uvjete iz pjesme, odnosno `NE` ako ne zadovoljava.

Probni primjeri

ulaz	ulaz	ulaz
2 3 6	5 6 2	60 1 120
izlaz	**izlaz**	**izlaz**
DA	NE	DA

Pojašnjenje prvog probnog primjera:

Ima jedan broj, djeljiv je s 2. U nizu brojeva djeljivih s 3. Odgovor je `DA` jer 6 zadovoljava uvjete iz pjesme.

Zadatak Pinokio

Donald je nedavno dobio otkaz i sada traži novi posao. Kao vrsni poznavatelj lažnih vijesti (engl. *fake news*), zaposlio se u medijskoj kući CNN na provjeri je li neka vijest lažna ili nije (engl. *fact-checking*). Pretražujući internet, naišao je na vijest jednog hrvatskog portala koja je glasila:

Nogometni klub Slaven Belupo je u dosadašnjem tijeku nogometnog prvenstva ostao neporažen u svih x utakmica koje je odigrao te sada ima y bodova.

Donald mora provjeriti je li ova informacija istinita ili lažna, tj. je li moguće da klub osvoji y bodova ako je u x utakmica bio neporažen (pobijedio je ili odigrao neriješeno). Znamo da se za pobjedu u nogometnoj utakmici dobiju tri boda, a za neriješen ishod jedan bod.

Ulazni podatci

U prvom je retku prirodan broj x ($1 \le x \le 100$) iz teksta zadatka.

U drugom je retku prirodan broj y ($1 \le y \le 1000$) iz teksta zadatka.

Izlazni podatci

Ispišite `ISTINA` ako je vijest istinita, odnosno `LAZ` ako je vijest lažna.

Bodovanje

U testnim primjerima vrijednima 12 bodova vrijedit će $x = 3$.

Probni primjeri

ulaz	ulaz	ulaz
1 3	5 13	10 11
izlaz	**izlaz**	**izlaz**
ISTINA	ISTINA	LAZ

Pojašnjenje drugog probnog primjera:

Vijest je istinita jer je Slaven od 5 neporaženih utakmica koje je odigrao u četiri pobijedio (12 bodova), a jednu odigrao neriješeno (1 bod).

Zadatak Crtanje

Josip se nekada natjecao u Logu. Obožavao je crtati kornjačom, ali prošli su ti dani. Malo nostalgičan, odlučio je nacrtati liniju koja predstavlja vrijednost njegove tvrtke kroz n dana.

On ima podatke za svaki od n dana. Podatak za neki dan može biti '+', '-' ili '='. Podatak '+' znači da je vrijednost njegove tvrtke u tom danu rasla za 1, podatak '-' znači da je vrijednost pala za 1, a podatak '=' znači da se vrijednost taj dan nije promijenila. Na početku je vrijednost tvrtke jednaka 0.

Josip će liniju nacrtati u velikoj beskonačnoj matrici znakova, u kojoj indeksi redaka rastu prema gore, a indeksi stupaca prema desno. Za dan i on će nacrtati neki znak u i-tom stupcu matrice. Koji znak i u kojem retku, odredit će prema sljedećim pravilima:

- Ako je vrijednost tvrtke u i-tom danu rasla, nacrtat će znak '/' u retku čiji je indeks jednak vrijednosti tvrtke na početku dana.
- Ako je vrijednost tvrtke u i-tom danu pala, nacrtat će znak '\' u retku čiji je indeks jednak vrijednosti tvrtke na kraju dana.
- Ako se vrijednost tvrtke u i-tom danu nije promijenila, nacrtat će znak '_' u retku čiji je indeks jednak vrijednosti tvrtke u tom danu.

U poljima u kojima nije nacrtao niti jedan od tri navedena znaka, Josip će nacrtati '.'.

Vaš zadatak je ispisati matricu najmanjih mogućih dimenzija koja sadrži cijelu Josipovu liniju, tj. koja sadrži sve znakove '/', '\' i '_' koje je Josip nacrtao.

Ulazni podatci

U prvom je retku prirodan broj n ($1 \leq n \leq 100$), broj dana.

U drugom je retku niz od n znakova '+', '-' i '=' koji predstavljaju podatke o kretanju vrijednosti tvrtke.

Izlazni podatci

Ispišite traženu matricu iz teksta zadatka.

ASCII vrijednosti znakova '/', '\' i '_' su redom 47, 92 i 95.

Bodovanje

U testnim primjerima vrijednima 20 bodova u ulaznim podacima neće se pojaviti znak '-'.

Probni primjeri

ulaz

```
7
++---==
```

izlaz

```
./\....
/..\...
....\__
```

ulaz

```
5
+=+=+
```

izlaz

```
...._/
._/..
/....
```

ulaz

```
4
--=+
```

izlaz

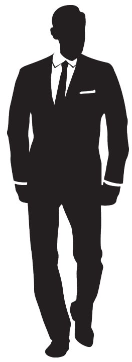
```
\...
.\_/
```

Pojašnjenje prvog probnog primjera:

	1	2	3	4	5	6	7
1	.	/	\	.	.	.	.
0	/	.	.	\	.	.	.
-1	.	.	.	.	\	_	_

Vrijednost tvrtke u 1. danu raste, i na početku dana je jednaka 0, pa Josip u polje (0, 1) crta znak '/'.
Vrijednost tvrtke u 2. danu raste, i na početku dana je jednaka 1, pa Josip u polje (1, 2) crta znak '/'.
Vrijednost tvrtke u 3. danu pada, i na kraju dana je jednaka 1, pa Josip u polje (1, 3) crta znak '\'.
Vrijednost tvrtke u 4. danu pada, i na kraju dana je jednaka 0, pa Josip u polje (0, 4) crta znak '\'.
Vrijednost tvrtke u 5. danu pada, i na kraju dana je jednaka -1, pa Josip u polje (-1, 5) crta znak '\'.
Vrijednost tvrtke se u 6. danu ne mijenja, i jednaka je -1, pa Josip u polje (-1, 6) crta znak '_'.
Vrijednost tvrtke se u 7. danu ne mijenja, i jednaka je -1, pa Josip u polje (-1, 7) crta znak '_'.

Zadatak Odašiljači



Sean se još jednom, i nažalost posljednji put, našao u ulozi Jamesa Bonda.

Misija mu je umrežiti n odašiljača koji se nalaze na različitim koordinatama velike pustinje. Svakom odašiljaču postavit će **isti radijus** odašiljanja r, koji je nenegativan realan broj. Domet odašiljača je skup svih točaka udaljenih od njega za najviše r. Ako se dometi dvaju odašiljača dodiruju ili preklapaju (drugim riječima, presjek njihovih dometa je neprazan), između njih je moguć izravan protok informacija. Također, ako je protok informacija moguć između odašiljača A i B te odašiljača B i C, protok je moguć i između odašiljača A i C, korištenjem odašiljača B kao posrednika.

Sean odašiljače želi umrežiti, to jest osigurati da je između **svaka dva** odašiljača moguć protok informacija. Budući da mu je M za ovu misiju ograničila prihode, a veći radijusi odašiljanja iziskuju više novca, Sean će odašiljače umrežiti uz **najmanji mogući radijus** r. Pomozite mu pronaći ga.

Ulazni podatci

U prvom je retku prirodan broj n ($1 \leq n \leq 1000$), broj odašiljača.

U svakom od sljedećih n redaka su po dva nenegativna cijela broja x_i i y_i ($0 \leq x_i, y_i \leq 10^9$), koordinate i-tog odašiljača.

Izlazni podatci

Ispišite traženi najmanji radijus.

Tolerirat će se apsolutno i relativno odstupanje od službenog rješenja za 10^{-6}.

Bodovanje

U testnim primjerima vrijednima 35 bodova vrijedit će $1 \leq n \leq 100$.

Probni primjeri

ulaz

```
2
1 1
2 2
```

izlaz

```
0.7071068
```

ulaz

```
7
2 3
3 4
4 5
0 1
3 1
4 2
1 5
```

izlaz

```
1.4142135
```

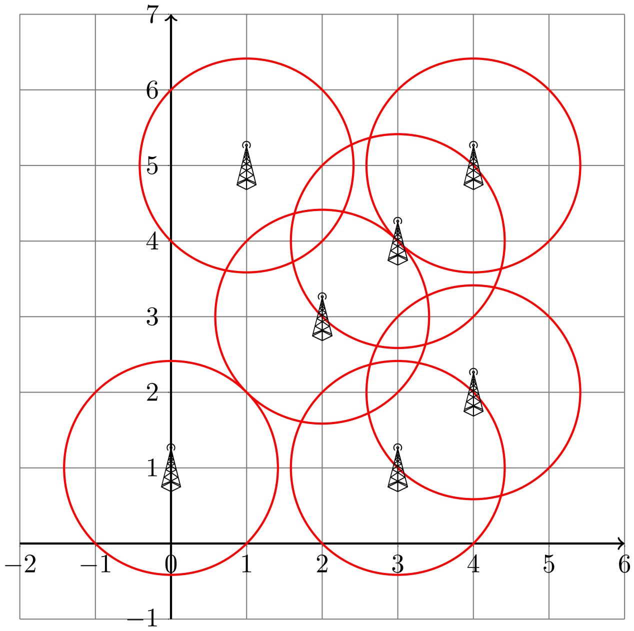
ulaz

```
4
2020 20
20 2020
2020 2020
20 20
```

izlaz

```
1000.0000000
```

Pojašnjenje drugog probnog primjera:



Zadatak Euklid

Malo je poznato da je Euklidova baka bila iz Vrsi. S tih prostora potječe i Euklidov manje poznati rođak Edikul, koji je u mladosti bio veliki matematički talenat.

Dogodi se tako da se njih dvojica igraju na algoritme. Edikul zapiše dva prirodna broja na pijesak. Zatim radi sljedeće: dok god nijedan nije 1, označi te brojeve s (a, b) tako da je $a \geq b$. Zatim obriše te brojeve i napiše $(\lfloor \frac{a}{b} \rfloor, b)$ na pijesak, te ponavlja postupak. Kad neki broj na pijesku postane jednak 1, onaj drugi broj je rezultat algoritma.

Drugim riječima, ako su a i b prirodni brojevi, za rezultat Edikulovog algoritma $R(a, b)$ vrijedi:

$$R(a,b) = \begin{cases} R(b,a) & \text{ako } a < b, \\ R(\lfloor \frac{a}{b} \rfloor, b) & \text{ako } a \geq b > 1, \\ a & \text{ako } a \geq b = 1. \end{cases}$$

Euklid pažljivo promatra, kaže: "Edikule, imam bolju ideju...", i ostalo je povijest. Naš Edikul nažalost nikad nije postao slavan zbog svojeg doprinosa teoriji brojeva.* Ova tužna priča inspirira sljedeći zadatak.

Zadani su prirodni brojevi g i h. Pronađite prirodne brojeve a i b takve da je njihov **najveći zajednički djelitelj** jednak g, a **rezultat Edikulovog algoritma** $R(a, b)$ jednak h.

Ulazni podatci

Jedan testni primjer sastoji se od t nezavisnih slučajeva.
U prvom je retku prirodan broj t $(1 \leq t \leq 40)$.

U svakom od sljedećih t redaka su po dva prirodna broja g_i i h_i $(h_i \geq 2)$.

Izlazni podatci

Ispišite t redaka. U i-ti redak ispišite prirodne brojeve a_i i b_i čiji je najveći zajednički djelitelj jednak g_i i vrijedi $R(a_i, b_i) = h_i$.

Ispisani brojevi ne smiju biti veći od 10^{18}. Moguće je dokazati da za dana ograničenja takvi brojevi uvijek postoje.

Ukoliko postoji više različitih rješenja, ispišite bilo koje.

Bodovanje

U svim podzadacima vrijedi $1 \leq g \leq 200\ 000$ i $\mathbf{2} \leq h \leq 200\ 000$.

Podzadatak	Broj bodova	Ograničenja
1	4	$g = h$
2	8	$h = 2$
3	8	$g = h^2$
4	15	$g, h \leq 20$
5	40	$g, h \leq 2000$
6	35	Nema dodatnih ograničenja.

*Poslije se zbog ove i mnogih drugih nepravdi sasvim pogubio, pričao o ravninama gdje se svaka dva pravca sijeku, te su ga zbog toga prozvali redikulom. C'est la vie.

Probni primjeri

ulaz

```
1
1 4
```

izlaz

```
99 23
```

ulaz

```
2
3 2
5 5
```

izlaz

```
9 39
5 5
```

Pojašnjenje prvog probnog primjera:

Brojevi 99 i 23 su relativno prosti, tj. najveći zajednički djelitelj im je 1. Vrijedi $\lfloor \frac{99}{23} \rfloor = 4$, stoga $R(99, 23) = R(4, 23) = R(23, 4)$. Dalje vrijedi $\lfloor \frac{23}{4} \rfloor = 5$, pa je $R(23, 4) = R(5, 4) = R(1, 4) = R(4, 1) = 4$.

Pojašnjenje drugog probnog primjera:

Najveći zajednički djelitelj od 9 i 39 je 3, a $R(9, 39) = 2$.

Najveći zajednički djelitelj od 5 i 5 je 5, a $R(5, 5) = 5$.

Zadatak Sjekira

Mirku je stresna pozicija direktora u poznatoj internacionalnoj informatičkoj tvrtci napokon dojadila. S par milijuna eura na svom računu, odlučio se posvetiti jednostavnijim stvarima u životu i preseliti se u Gorski kotar gdje će u miru kontemplirati svoje životne odluke. Ono s čime Mirko nije računao kad se preselio je da zima dolazi. Kako su u njegovom selu svi stanovnici osim njega stariji od 76 godina, Mirko će morati sam srušiti stabla i cijepati drva.

Odlučio je da će danas cijepati svoje prvo drvo. Prije nego što krene s cijepanjem, on dijeli drvo na povezane dijelove koji su dovoljno mali da stanu u peć i određuje im tvrdoću. Budući da je Mirko informatičar, dijelovi i veze među njima čine **graf stablo**. Šteta na sjekiri nastala sječom neke veze jednaka je **zbroju maksimalnih tvrdoća dijelova u svakoj od dvije novonastale povezane komponente**.

Mirko ima samo jednu sjekiru pa želi stvoriti što manje štete na njoj. Stoga ga zanima **najmanja ukupna šteta** koju će sjekira pretrpjeti, ako želi rascijepati cijelo drvo na dijelove koji stanu u peć.

Ulazni podatci

U prvom je retku prirodan broj n, broj dijelova drveta. Dijelovi su označeni brojevima od 1 do n.

U drugom je retku n brojeva t_i $(1 \leq t_i \leq 10^9)$. Broj t_i označava tvrdoću dijela s oznakom i.

U svakom od sljedećih $n-1$ redaka su po dva broja x i y $(1 \leq x, y \leq n)$ – oznake dijelova koji su izravno povezani.

Izlazni podatci

Ispišite minimalnu ukupnu štetu nakon $n-1$ sječa.

Bodovanje

U svim podzadacima vrijedi $1 \leq n \leq 100\ 000$.

Podzadatak	Broj bodova	Ograničenja
1	10	$1 \leq n \leq 10$
2	10	Dijelovi i te $i+1$ $(1 \leq i \leq n-1)$ su izravno povezani.
3	30	$1 \leq n \leq 1000$
4	60	$1 \leq n \leq 100\ 000$

Probni primjeri

ulaz

```
3
1 2 3
1 2
2 3
```

izlaz

```
8
```

ulaz

```
4
2 2 3 2
1 3
3 2
4 3
```

izlaz

```
15
```

ulaz

```
5
5 2 3 1 4
2 1
3 1
2 4
2 5
```

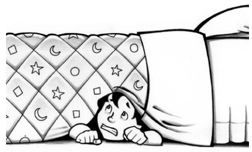
izlaz

```
26
```

Pojašnjenje prvog probnog primjera:

Postoje dva načina kako Mirko može rasjeći ovo drvo. Prvi je tako da prvo presiječe vezu $(1, 2)$, što uzrokuje $1 + 3 = 4$ štete, pa zatim vezu $(2, 3)$, što uzrokuje $2 + 3 = 5$ štete. Ukupna šteta u tom slučaju je 9. Ako Mirko prvo siječe $(2, 3)$, a zatim $(1, 2)$, šteta će biti $(2 + 3) + (1 + 2) = 8$.

Zadatak Svjetlo



Joj ne! Pala je noć, a mali Fabijan se boji mraka. Da stvar bude gora, luster u njegovoj sobi je pokvaren.

Luster možemo prikazati kao n žarulja povezanih s $n - 1$ žica, tako da svaka žica povezuje točno dvije žarulje te su sve žarulje povezane izravno ili preko drugih žarulja. Drugim riječima, luster je stablo.

Svaka žarulja na sebi ima gumb koji joj mijenja stanje. Ako je ugašena, pritisak gumba će je upaliti, a ako je upaljena onda će je ugasiti. Na početku su neke žarulje ugašene, a neke upaljene (moguće je da su sve ugašene). Kako se Fabijan ne bi bojao, **svih n žarulja treba biti u upaljenom stanju**, zato da u sobi bude dovoljno svjetla.

Fabijan će **odabrati neki niz** žarulja takav da su **susjedne** žarulje u tom nizu **izravno povezane** žicom. Žarulje se u nizu smiju ponavljati. Zatim će obilaziti žarulje redom kojim se nalaze u nizu. Budući da Fabijan jaaako voli pritiskati gumbe, bilo na žaruljama, perilicama rublja ili u liftovima, on će svaki put **kad obiđe neku žarulju jednom pritisnuti njezin gumb** mijenjajući joj stanje.

Pomozite Fabijanu i odredite duljinu **najkraćeg niza** žarulja takvog da su na kraju sve žarulje upaljene. **Na početku će barem jedna žarulja biti ugašena.**

Ulazni podatci

U prvom je retku prirodan broj n, broj žarulja. Žarulje su označene brojevima od 1 do n.

U drugom je retku niz od n znakova `'0'` i `'1'`. Ako je znak na i-toj poziciji jednak `'0'`, onda je i-ta žarulja na početku ugašena, a ako je jednak `'1'`, onda je upaljena.

U svakom od sljedećih $n - 1$ redaka su po dva broja x i y ($1 \le x, y \le n$) – oznake žarulja koje su izravno povezane žicom.

Izlazni podatci

Ispišite duljinu najkraćeg niza žarulja takvog da su na kraju sve žarulje upaljene.

Moguće je dokazati da takav niz uvijek postoji.

Bodovanje

U svim podzadacima vrijedi $2 \le n \le 500\,000$.

Podzadatak	Broj bodova	Ograničenja
1	20	$2 \le n \le 100$
2	30	Svaka žarulja je izravno povezana s najviše dvije druge žarulje.
3	30	Na početku su sve žarulje ugašene.
4	30	Nema dodatnih ograničenja.

Probni primjeri

ulaz

```
3
010
1 2
2 3
```

izlaz

```
4
```

ulaz

```
5
00000
1 2
2 3
2 4
3 5
```

izlaz

```
7
```

ulaz

```
5
00100
1 2
2 3
2 4
3 5
```

izlaz

```
8
```

Pojašnjenje prvog probnog primjera:

Fabijan može obilaziti redom žarulje 1, 2, 3 i 2.